

WYKŁAD 1

Kinematyka punktu

Kinematyka punktu w nieruchomym prostokątnym układzie odniesienia.
Kinematyka punktu w układzie naturalnym.

ĆWICZENIE 1

Kinematyka punktu w nieruchomym prostokątnym układzie odniesienia.

Zadanie 1.1

Ruch prostoliniowy punktu **A** jest opisany równaniem: $x(t)=2t^3-(1.5)t^2-3t+5$, gdzie x [m], t [s]. Wyznaczyć położenie i przyspieszenie punktu na osi x w chwili, gdy jego prędkość $v=0$. Przedstawić na wykresie przebieg prędkości i przyspieszenia w funkcji czasu.

Zadanie 1.2

Punkt porusza się po prostej. Wyprowadzić wzory na prędkość i drogę tego punktu, jeśli w chwili początkowej $t=0$ jego prędkość $v(0)=v_0$ i położenie $s(0)=s_0$. Zadanie rozwiązać dla przypadków:

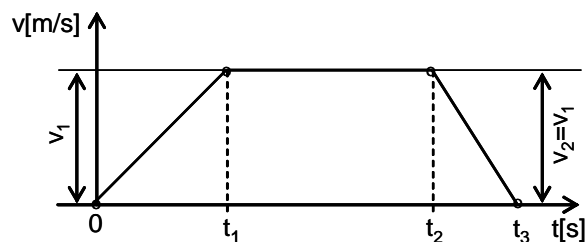
- ruchu prostoliniowego jednostajnego, $a=0$;
- ruchu prostoliniowego jednostajnie zmiennego, $a=\text{const}$ ($a \neq 0$);
- ruchu prostoliniowego niejednostajnie zmiennego, $a=a(t)$, gdzie t – czas.

Zadanie 1.3

Prędkość lądowania samolotu wynosi $v_0=216\text{km/h}$. Obliczyć czas t_1 [s], jaki upłynie od początku lądowania do zatrzymania się oraz drogę lądowania s_1 [m]. Obliczenia wykonać dla dwóch przypadków: a) opóźnienie stałe $a=-2\text{m/s}^2$, b) opóźnienie zmienne $a=-2t[\text{m/s}^2]$.

Zadanie 1.4

Na rysunku przedstawiono wykres prędkości $v=f(t)$ poruszającego się pojazdu w funkcji czasu t . Wyznaczyć drogę jaką pokonał pojazd od startu do zatrzymania. Narysować wykresy drogi $s=s(t)$ i przyspieszenia $a=a(t)$ pojazdu w przedziale czasu $t \in \langle 0, t_3 \rangle$, jeśli dla $t=0$: $v_0=0$, $s_0=0$. Przyjąć czasy t_1, t_2, t_3 oraz prędkości $v_1=v_2$ jako dane. Obliczyć średnią prędkość pojazdu na przejechanym odcinku drogi.



Zadanie 1.5

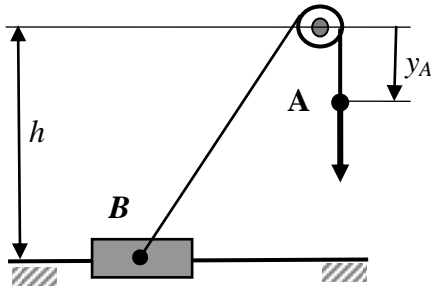
Ruch prostoliniowy punktu określony jest równaniem $x(v)=bv^2-c$, gdzie b i c – stałe, v – prędkość. Po jakim czasie prędkość punktu będzie dwa razy większa od prędkości początkowej? W chwili początkowej punkt znajdował się w położeniu $x(0)=0$.

Zadanie 1.6

Ruch prostoliniowy punktu jest opisany równaniem $v(s)=b \cdot s^2$ przy warunkach początkowych s_0, v_0 , gdzie v – prędkość, s – droga, $b = \text{const}$. Wyznaczyć przyspieszenie $a(s)$.

Zadanie 1.7

Do suwaka B przymocowano nierozciągliwą linkę o długości l , którą przerzucono przez niewielki krążek. Drugi koniec linki A ma prędkość stałą równą v_A . Suwak porusza się wzdłuż poziomej prostej. Określić prędkość i przyspieszenie suwaka B w funkcji odległości y_A punktu A od środka krążka, który jest zamocowany na wysokości h w stosunku do suwaka.



Zadanie 1.8

Wyznaczyć równanie toru punktu i narysować go, jeśli: $x=h \cdot \sin(\omega t)$, $y=h \cdot \cos^2(\omega t)$, gdzie h, ω - stałe, t -czas. Oblicz prędkość i przyspieszenie tego punktu w chwili $t_1=\pi/2\omega$.

Zadanie 1.9

Dane są równania ruchu punktu: $x=(1/2)t^2$, $y=(1/3)t^3$. Określić prędkość i przyspieszenie punktu w funkcji czasu. Wyprowadzić równanie toru i narysować go oraz wyznaczyć równanie ruchu punktu po torze $s(t)$, licząc drogę od początkowego położenia punktu.

Zadanie 1.10

Punkt A porusza się w płaszczyźnie Oxy. W chwili $t=0$, punkt znajdował się w początku układu Oxy a współrzędne wektora jego prędkości wynosiły: $v_{ox}=1\text{m/s}$ i $v_{oy}= -2\text{m/s}$. W czasie ruchu ($t>0$), współrzędne wektora przyspieszenia tego punktu są równe: $a_x=0$, $a_y=4\sin(2t)[\text{m/s}^2]$. Wyznaczyć równania ruchu oraz równanie toru punktu i jego wykres.

Zadanie 1.11

Dane są równania ruchu punktu: $x(t)=t^3/3$, $y(t) = -2t^2$, $z(t)=\sqrt[2]{8} \cdot t$, gdzie $x, y, z[\text{m}]$, $t[\text{s}]$. Określić przyspieszenie punktu i jego odległość od początku układu Oxyz w chwili, gdy jego prędkość jest równa $v=5\text{m/s}$.

ĆWICZENIE 2

Kinematyka punktu w układzie naturalnym

Zadanie 2.1

Punkt materialny **A** porusza się zgodnie z równaniami ruchu: $x(t)=b \cdot \sin(\omega t)$, $y(t)=c \cdot \cos(\omega t)$, gdzie b , c i ω są stałymi. Wyznaczyć równanie toru punktu, jego prędkość oraz przyspieszenie całkowite, styczne i normalne w funkcji czasu.

Zadanie 2.2

Pojazd mający prędkość początkową $v_0=72\text{km/h}$, przejechał $s_l=100\text{m}$ w ciągu $t_l=4\text{s}$. Wiedząc, że przyspieszenie styczne pociągu ma stałą wartość, obliczyć jego prędkość i przyspieszenie całkowite w chwili t_l , jeżeli ruch odbywał się na zakręcie o promieniu $r=1800\text{m}$.

Zadanie 2.3

Punkt materialny **A** zaczął poruszać się po okręgu o promieniu $r=4\text{m}$ w ten sposób, że jego przyspieszenie styczne $a_t=2t[\text{m/s}^2]$. Po jakim czasie jego przyspieszenie normalne będzie równe stycznemu i jaka będzie wtedy jego prędkość punktu?

Zadanie 2.4

Obliczyć promień krzywizny toru środka kulki w chwili początkowej, jeżeli równania ruchu mają postać: $x=2t$, $y=t^2$.

Zadanie 2.5

Punkt **A** porusza się po krzywej płaskiej zgodnie z równaniem $s=b(e^{kt}-1)$ gdzie b , k są stałymi. Kąt między całkowitym przyspieszeniem i prędkością wynosi $\alpha=60^\circ$. Obliczyć prędkość i całkowite przyspieszenie punktu.

Zadanie 2.6

Dwa punkty **A** i **B** poruszają się po okręgu o promieniu $r=2\text{m}$ w przeciwnie strony zgodnie z równaniami drogi $s_A(t)=\pi t$ i $s_B(t)=\pi^2 t$ [m], t [s]. Punkty wyruszyły z przeciwnych końców średnicy. Obliczyć przyspieszenia punktów w momencie ich pierwszego spotkania.

Zadanie 2.7

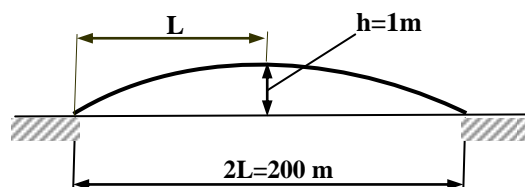
Ruch punktu zadano równaniami: $x=e^t \cos t$, $y=e^t \sin t$, $z=e^t$. Znaleźć prędkość oraz przyspieszenie styczne i normalne tego punktu w funkcji czasu.

Zadanie 2.8

Równania ruchu punktu mają postać: $x=t \sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4 \sin(t/2)$. Wyznaczyć prędkość, przyspieszenie styczne i promień krzywizny toru w dowolnej chwili czasu.

Zadanie 2.9

Samochód jedzie po moście z prędkością $v=72\text{km/h}$. Określić jego największe przyspieszenie, jeżeli wiadomo, że most ma kształt paraboliczny a jego wymiary podano na rysunku.



Promień krzywizny krzywej płaskiej $y(x)$:
$$\rho(x) = \left\{ \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \right\} \cdot \left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|^{-1}$$

WYKŁAD 2

Kinematyka ciała sztywnego (CS)

Ruch dowolny CS - prędkości dwóch dowolnych jego punktów.

Ruch postępowy i obrotowy wokół stałej osi.

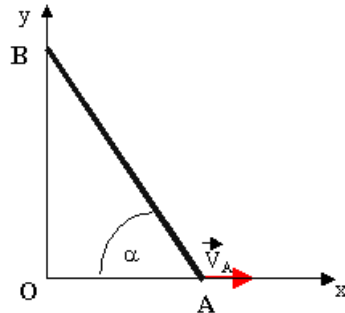
ĆWICZENIE 3

Ruch dowolny, postępowy i obrotowy CS

Ruch dowolny – prędkości dwóch dowolnych punktów CS

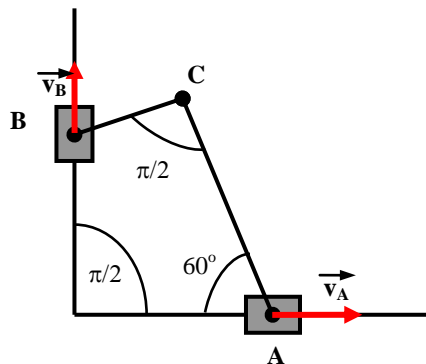
Zadanie 3.1

Pręt AB oparty o osie Oxy porusza się tak, że prędkość końca A pręta $v_A=3\text{m/s}$. Oblicz prędkość końca B tego pręta dla $\alpha=(\pi/3)\text{rad}$.



Zadanie 3.2

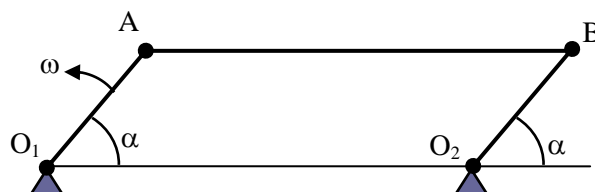
Dla układu przegubowo połączonych prętów jak na rysunku określić prędkość punktu C w chwili, gdy prędkość punktu A wynosi 8 m/s a punktu B 6 m/s .



Ruch postępowy.

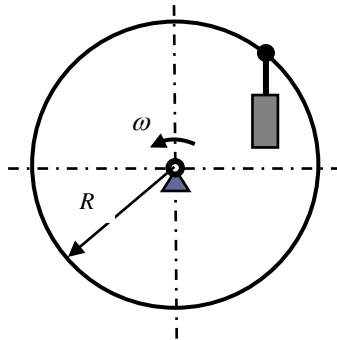
Zadanie 3.3

Płaski mechanizm przegubowy złożony z 3 prętów $O_1A=O_2B=b$ i $AB=3b$ wykonuje ruch jak na rysunku ze stałą prędkością kątową prętów O_1A i O_2B równą ω . Wykazać, że pręt AB wykonuje ruch postępowy oraz wyznaczyć prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu tego pręta.



Zadanie 3.4

Gondola jest przymocowana przegubowo do koła karuzeli o promieniu $R=5\text{m}$, które obraca się w płaszczyźnie pionowej z prędkością kątową $\omega=(1/\pi)\text{rad/s}$. Jaki ruch wykonuje gondola? Wyznacz zakres zmian prędkości pionowej i poziomej tej gondoli.



Ruch obrotowy wokół stałej osi.

Zadanie 3.5

Koło o promieniu r obraca się wokół własnej nieruchomej osi. Wyznaczyć równania na prędkość kątową i kąt obrotu koła oraz prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu na obwodzie tego koła dla przypadków:

- jednostajnego ruchu obrotowego, $\varepsilon=0$;
- jednostajnie zmiennego ruchu obrotowego, $\varepsilon=\text{const}$ ($\varepsilon\neq 0$);
- niejednostajnie zmiennego ruchu obrotowego, $\varepsilon=\varepsilon(t)$, gdzie t – czas;
warunki początkowe: $\varphi(0)=\varphi_0$, $\omega(0)=\omega_0$.

Zadanie 3.6

Wirnik silnika otrzymał początkową prędkość obrotową $n_0=50\text{obr/s}$. Po wykonaniu $k=500$ obrotów, wskutek tarcia w łożyskach, zatrzymał się. Obliczyć opóźnienie kątowe ε tego wirnika uważając je za stałe.

Zadanie 3.7

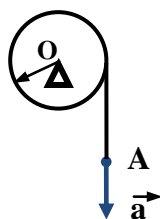
Walec obraca się dokoła swej nieruchomej osi tak, że jego przyspieszenie kątowe ε jest proporcjonalne do jego prędkości kątowej ω ze stałym współczynnikiem k . Prędkość początkowa walca wynosiła ω_0 . Wyprowadzić równanie ruchu obrotowego walca.

Zadanie 3.8

Tarcza kołowa obraca się dokoła swej nieruchomej osi z opóźnieniem kątowym $\varepsilon=-\eta\omega^2$ a początkowa prędkość kątowa tarczy wynosiła ω_0 . Znaleźć $\omega(t)$, $\varepsilon(t)$ i $\varphi(t)$ oraz wykonać wykresy tych funkcji.

Zadanie 3.9

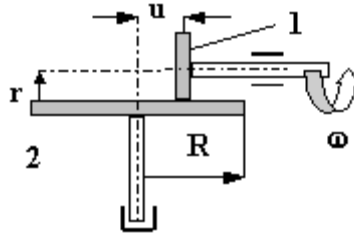
Na bęben o promieniu $r=0.5\text{m}$ nawinięto nierozciągliwą linę. Koniec nawiniętej na bęben liny **A** porusza się z przyspieszeniem $a=0.6t[\text{m/s}^2]$. Znaleźć przyspieszenie dowolnego punktu leżącego na obwodzie bębna po przebyciu przez punkt **A** drogi $s_1=0.8\text{m}$, jeśli $v(0)=0$, $s(0)=0$.



Zadanie 3.10

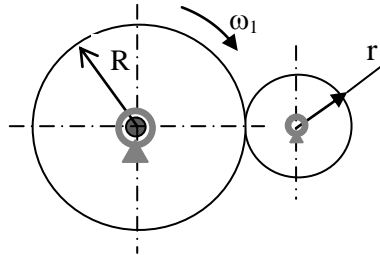
Koło 1 przekładni ciernej wykonuje $f_1=600$ obr/min i jednocześnie przesuwa się osiowo według równania $u=10-0,5t$, gdzie: u [cm], t [s]. Oblicz dla $r=5$ cm, i $R=15$ cm:

- przyspieszenie kątowe ε_2 koła 2. w funkcji przesunięcia u , tzn. $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(u)$;
- całkowite przyspieszenie dowolnego punktu B na obwodzie koła 2 w chwili gdy $u=r$.



Zadanie 3.11

Koło napędowe o promieniu $R=20$ cm przekładni ciernej wprawia bez poślizgu w ruch koło o promieniu $r=10$ cm. Rozruch koła napędowego odbywa się z przyspieszeniem $\varepsilon_1 = 2$ rad/s², przy czym, $\omega_1(0)=0$. Obliczyć, po jakim czasie τ prędkość obrotowa koła napędzanego $n_2=600\pi^{-1}$ obr/min.



WYKŁAD 3

Kinematyka ciała sztywnego

Ruch płaski

Ruch złożony punktu

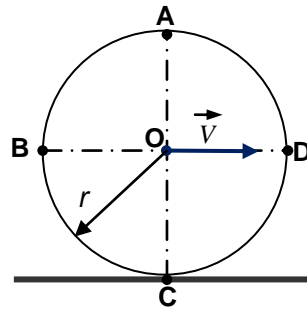
Układ nieruchomy i ruchomy. Kinematyka punktu w dwóch układach odniesienia.

ĆWICZENIE 4

Ruch płaski

Zadanie 4.1

Tarcza kołowa o promieniu $r=0.5\text{m}$ toczy się bez poślizgu po prostej, przy czym środek tarczy O ma stałą prędkość $v=2\text{m/s}$. Wyznaczyć prędkości i przyspieszenia punktów A, B, C i D zaznaczonych na rysunku.

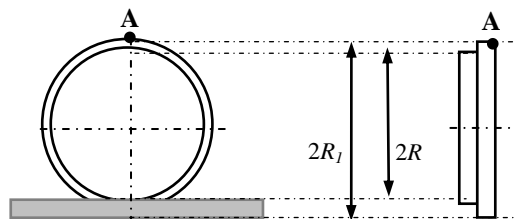


Zadanie 4.2

Tarcza kołowa o promieniu $r=0.5\text{m}$ toczy się bez poślizgu po prostej, przy czym środek tarczy O ma prędkość $v_o=2t[\text{m/s}]$. Wyznaczyć prędkości i przyspieszenia punktów A, B, C i D zaznaczonych na rysunku w zadaniu 4.1.

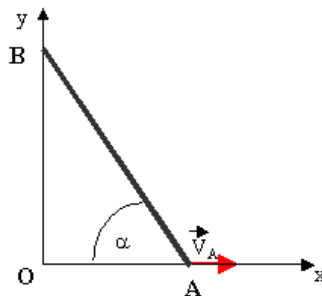
Zadanie 4.3

Koło kolejowego zestawu kołowego toczy się bez poślizgu po prostej szynie ze stałą prędkością kątową ω . Znaleźć prędkość i przyspieszenie punktu A na obrzeżu koła.



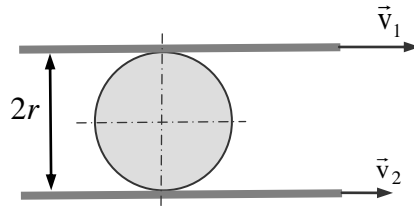
Zadanie 4.4

Pręt prosty AB o długości l ślizga się ruchem płaskim po osiach układu Oxy. W chwili, gdy tworzy on z osią Ox kąt α , prędkość jego końca A wynosi v_A . Wyznacz dla tego położenia chwilowy środek obrotu, prędkość kątową pręta oraz prędkość końca B i środka pręta.



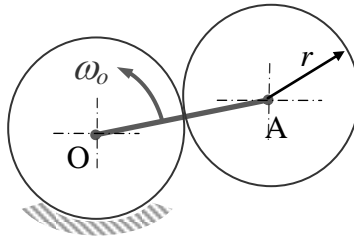
Zadanie 4.5

Pomiędzy dwie równoległe, odległe od siebie o $2r$ listwy wstawiono koło, które może toczyć się względem nich bez poślizgu. Wyznaczyć prędkość środka koła i jego prędkość kątową, jeżeli listwy poruszają się równoległe z prędkościami v_1 i v_2 ($v_1 > v_2$).



Zadanie 4.6

Koło zębate o promieniu r jest uruchamiane korbą OA, obracającą się dokoła osi stałego koła zębatego o tym samym promieniu. Korba obraca się z prędkością kątową stałą ω_0 . Wyznaczyć przyspieszenie punktu koła ruchomego, który w danej chwili jest chwilowym środkiem obrotu tego koła. Po wyprowadzeniu wzoru ogólnego, wykonać obliczenia dla $r = 12\text{cm}$, $\omega_0 = 5\text{rad/s}$.



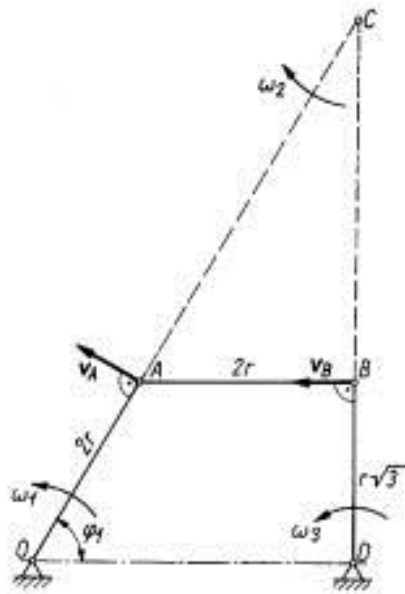
ĆWICZENIE 5
Ruch płaski c.d.

Zadanie 5.1

Koniec A prostego pręta AB o długości $h=1\text{m}$ porusza się po nieruchomej prostej ze stałą prędkością $v_A=3^{1/2}\text{ m/s}$. Jednocześnie pręt obraca się względem końca A ze stałą prędkością kątową $\omega=2\text{rad/s}$. Oblicz prędkość i przyspieszenie punktu B pręta w chwili gdy tworzy on z wektorem prędkości punktu A kąt $\alpha=60^\circ$.

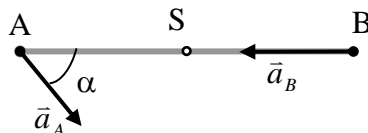
Zadanie 5.2

Obliczyć prędkość punktu B mechanizmu oraz prędkości kątowe prętów AB i BD w położeniu jak na rysunku. Korba OA obraca się z prędkością kątową ω_1 . Zaznaczone na rysunku wymiary mechanizmu wynoszą: $\overline{OA} = \overline{AB} = 2r$, $\overline{DB} = \sqrt{3}r$, $\sphericalangle ABD = 90^\circ$ i $\varphi_1 = 60^\circ$.



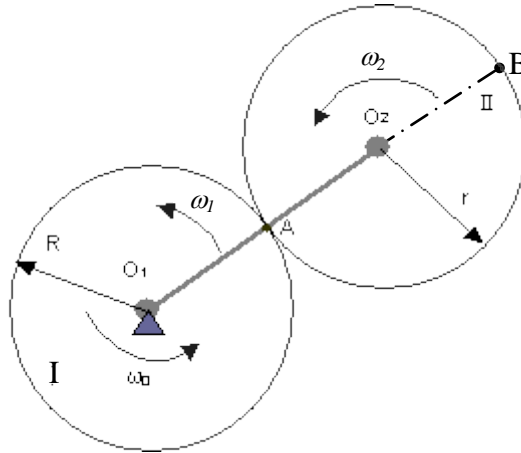
Zadanie 5.3

Przyspieszenia końców pręta AB o długości $l=1\text{m}$, poruszającego się w płaszczyźnie rysunku, wynoszą a_A i a_B . Wyznaczyć przyspieszenie a_S środka S tego pręta oraz oznaczyć na rysunku jego kierunek i zwrot, jeśli $a_A=a_B=2^{1/2}\text{m/s}^2$, $\alpha=(\pi/4)\text{rad}$. Wyznaczyć prędkość kątową i przyspieszenie kątowe tego pręta.



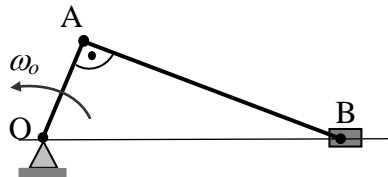
Zadanie 5.4

Dwie tarcze kołowe o promieniach R i r stykają się ze sobą. Tarcza I obraca się wokół swej nieruchomej osi z prędkością kątową ω_0 . Tarcza II połączona jest z tarczą I korbą O_1O_2 obracającą się ze stałą prędkością ω_1 . Wyznacz prędkość kątową ω_2 tarczy II oraz prędkość i przyspieszenie punktu B.



Zadanie 5.5

Na rysunku przedstawiono schemat mechanizmu korbowo-tłokowego. Korba OA ma długość r a korbówód AB długość l . Dla szczególnego położenia mechanizmu, tj. $OA \perp AB$, należy wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu B (środka tłoka). Korba OA obraca się ze stałą prędkością kątową równą ω_0 .



ĆWICZENIE 6

Ruch złożony punktu.

Zadanie 6.1

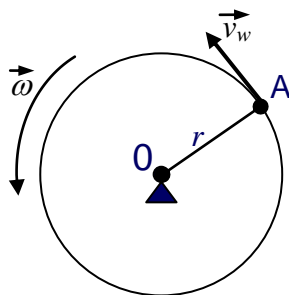
Balon wznosi się pionowo z prędkością $w=5\text{m/s}$, zaś prędkość bocznego podmuchu wiatru wynosi $u=8\text{m/s}$. Jaka jest prędkość bezwzględna balonu? Oblicz wartość znoszenia bocznego po uzyskaniu przez balon wysokości $h=1\text{km}$.

Zadanie 6.2

Pręt prosty AB obraca się w płaszczyźnie Axy wokół swego nieruchomego końca A zgodnie z równaniem $\varphi=bt^2$, gdzie b – stała, t – czas. Wzdłuż osi pręta, w kierunku końca B, przesuwa się tulejka z prędkością $w=\text{const}$ względem pręta. Wyznaczyć prędkość bezwzględną i przyspieszenie bezwzględne środka tulejki.

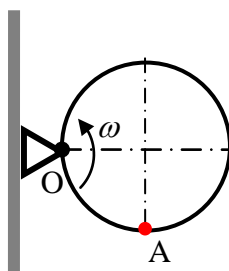
Zadanie 6.3

Punkt A porusza się po obwodzie koła o promieniu $r=1\text{m}$ z prędkością względną $v_w=1\text{m/s}$. Jednocześnie koło obraca się względem swego nieruchomego środka z prędkością kątową $\omega=1\text{rad/s}$. Obliczyć prędkość bezwzględną i przyspieszenie bezwzględne punktu A. Wykonaj odpowiednie rysunki.



Zadanie 6.4

Koło o promieniu $r=0,2\text{m}$ obraca się w swej płaszczyźnie wokół stałego punktu O ze stałą prędkością kątową $\omega=5\text{rad/s}$. Po obwodzie koła przesuwa się punkt ze stałą prędkością względną $v_w=1\text{m/s}$. Obliczyć bezwzględną prędkość i bezwzględne przyspieszenie punktu w położeniu A, rozważając ruch względny punktu w jednym a następnie drugim kierunku.



Zadanie 6.5

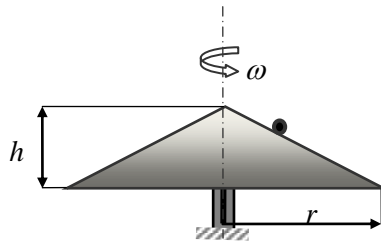
Linia kolejowa przebiega wzdłuż południka. Lokomotywa jedzie na północ z prędkością $v=216\text{km/h}$. Obliczyć przyspieszenie Coriolisa lokomotywy w chwili, gdy jej położenie jest określone szerokością geograficzną północną $\alpha=60^\circ$.

Zadanie 6.6

Koło o promieniu r obraca się w swej płaszczyźnie ze stałą prędkością kątową ω wokół osi przechodzącej przez jego środek. Po średnicy koła porusza się punkt zgodnie z równaniem drogi $s(t)=r\sin(\omega t)$. Punkt wystartował ze środka koła. Znaleźć prędkość bezwzględną i przyspieszenie bezwzględne punktu w zależności od czasu.

Zadanie 6.7

Stożek kołowy o promieniu podstawy r i wysokości h obraca się wokół własnej nieruchomej osi symetrii z prędkością kątową $\omega = \text{const}$. Wzdłuż tworzącej stożka porusza się punkt od wierzchołka w dół w myśl równania $s=kt^2$ (k – stała, t - czas). Wyznaczyć prędkość bezwzględną i przyspieszenie bezwzględne tego punktu w funkcji czasu.



WYKŁAD 4

Dynamiczne równania ruchu punktu materialnego

Prawa dynamiki Newtona. Równania ruchu punktu w układzie inercjalnym.
Siły bezwładności i zasada d'Alemberta.

ĆWICZENIE 7

Prawa dynamiki Newtona. Równania ruchu punktu w układzie inercjalnym.

Zadanie 7.1

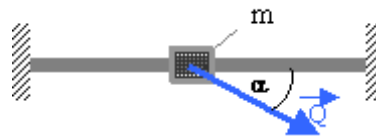
Punkt materialny o masie $m=0.5\text{kg}$ porusza się pod działaniem sił: $F_x=-2\sin(t)[\text{N}]$, $F_y=-2\cos(t)[\text{N}]$. Określić tor, przyspieszenie całkowite, styczne i normalne tego punktu, jeśli $v_x(0)=4\text{m/s}$, $v_y(0)=0$, $x(0)=0$ i $y(0)=4\text{m}$.

Zadanie 7.2

Równania ruchu punktu o masie m mają postać: $x=b\cdot\sin(kt)$, $y=c\cdot\cos(2kt)$; przy czym b , c i k są stałymi zaś t - oznacza czas. Wyznaczyć siłę F działającą na ten punkt jako funkcję współrzędnych x i y .

Zadanie 7.3

Suwak o masie $m=0.6\text{kg}$ będąc w stanie spoczynku, został wprowadzony w ruch wzdłuż prowadnicy za pomocą siły $Q=10\text{N}$, skierowanej do osi prowadnicy pod kątem $\alpha=30^\circ$. Jaka prędkość uzyska suwak po przesunięciu go na odległość $s_l=1\text{m}$, jeżeli współczynnik tarcia suwak-prowadnica wynosi $\mu=0.2$?



Zadanie 7.4

Po jakim czasie i na jakim odcinku może zatrzymać się wskutek hamowania wagon tramwajowy jadący po poziomym i prostym torze z prędkością $v_o=36\text{km/h}$, jeśli opór hamowania jest stały i wynosi 3kN na jedną tonę ciężaru wagonu.

Zadanie 7.5

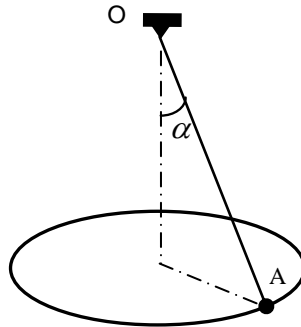
Pocisk o masie m wystrzelono pionowo w górę z prędkością początkową v_o . Wiedząc, że siła oporu powietrza jest w postaci $R=k\cdot v$ (k - stały współczynnik, v - prędkość pocisku), wyznaczyć czas, po którym pocisk osiągnie maksymalną wysokość.

Zadanie 7.6

Punkt materialny o masie $m=10\text{kg}$ porusza się po prostej poziomej x pod wpływem siły $P(t)=\begin{cases} 2t, & \text{dla } 0 \leq t \leq 3\text{s} \\ 0, & \text{dla } t > 3\text{s} \end{cases} [\text{N}]$, przy warunkach początkowych $x(0)=0$, $v(0)=0$. Napisać równania ruchu i rozwiązać je.

Zadanie 7.7

Mała kulka **A** o ciężarze $Q=10\text{N}$ zawieszona w nieruchomym punkcie **O** na lince o długości $l=30\text{cm}$ tworzy wahadło stożkowe (zatacza okrąg w płaszczyźnie poziomej). Linka tworzy z pionem kąt $\alpha=\pi/6\text{rad}$. Obliczyć prędkość kulki i naciąg linki.

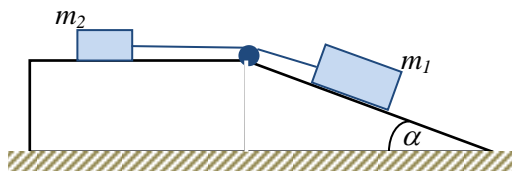


Zadanie 7.8

Z wierzchołka gładkiej półkuli zaczął zsuwać się punkt materialny. Znaleźć kąt α_0 określający położenie tego punktu, w którym oderwie się on od powierzchni półkuli.

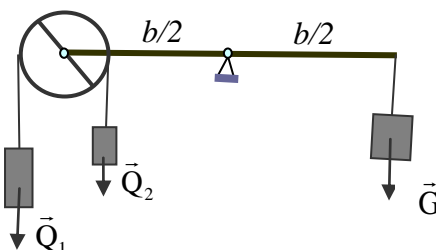
Zadanie 7.9

Dla układu dwóch mas równych m_1 i m_2 połączonych nierozciągliwą i lekką nicią wyznaczyć warunek jaki musi spełnić masa m_1 , aby jej ruch w dół równi był możliwy. Masa m_1 spoczywa na nieruchomej gładkiej równi pochyłej o kącie nachylenia α , zaś masa m_2 na poziomym podłożu. Współczynnik tarcia masy m_2 o podłoże wynosi μ . Tarcie między nicią i rolką pomijamy.



Zadanie 7.10

Do jednego końca belki wagowej przyczepiono obrotowy lekki bloczek, przez który przewinięto linkę. Na końcach linki zawieszono ciężary Q_1 i Q_2 . Jaki ciężar G należy zawiesić na drugim końcu belki, aby pozostawała ona w równowadze? Ciężar boczka jest pomijalnie mały.

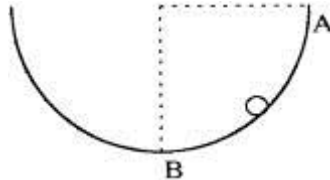


ĆWICZENIE 8

Siły bezwładności i zasada d'Alemberta.

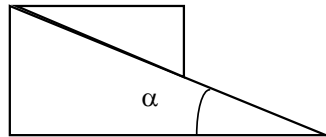
Zadanie 8.1

Kulka o masie m stacza się po rynnie kołowej o promieniu r bez prędkości początkowej z punktu **A**. Znaleźć reakcję rynny, gdy kulka będzie mijała punkt **B**.



Zadanie 8.2

Z jakim przyspieszeniem musi poruszać się klin dolny, aby klin górny nie zsuwał się z niego? Między powierzchniami styku klinów nie występuje tarcie, kąt pochylenia klina dolnego wynosi α .

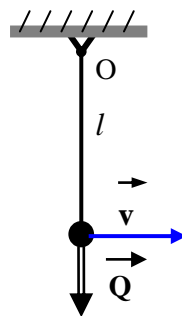


Zadanie 8.3

Dwa wagoniki połączone nierozciągliwą liną poruszają się po torze prostym poziomym pod działaniem stałej siły pociągowej P . Ciężary wagoników wynoszą odpowiednio G_1 i G_2 a siła oporu ruchu każdego wagonika wynosi 0.1 jego ciężaru. Oblicz przyspieszenie wagoników i naciąg liny między nimi.

Zadanie 8.4

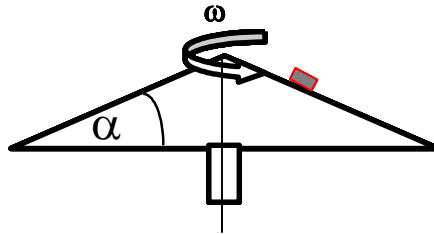
Kula o ciężarze $Q=2\text{kG}$ zawieszona na nieważkiej linie o długości $l=1\text{m}$ uzyskała wskutek uderzenia prędkość $v=5\text{m/s}$. Oblicz siłę w linie bezpośrednio po uderzeniu.



Zadanie 8.5

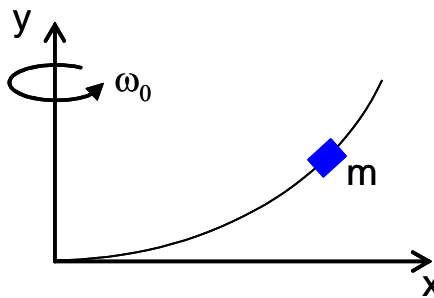
Na powierzchni stożka o kącie przy podstawie α , obracającego się ze stałą prędkością kątową ω znajduje się punkt materialny o masie m .

W jakiej największej odległości r od osi obrotu może pozostawać ten punkt, aby nie nastąpił jego poślizg po tworzącej stożka. Współczynnik tarcia statycznego wynosi μ .



Zadanie 8.6

Mały pierścień jest nasunięty na gładki drut OA obracający się wokół pionowej osi z prędkością kątową $\omega_0 = \text{const}$. Oś drutu jest krzywą płaską. Znaleźć równanie tej krzywej, aby zachodziła równowaga względna dla dowolnego położenia pierścienia.



Zadanie 8.7

Obliczyć zakres dopuszczalnych prędkości samochodu o ciężarze Q jadącego na zakręcie o promieniu krzywizny r , jeżeli współczynnik tarcia posuwistego kół o nawierzchnię wynosi μ a kąt pochylenia poprzecznego jezdni do poziomemu α .

WYKŁAD 5

Zasady w dynamice punktu materialnego i układu punktów materialnych

Pęd, moment pędu (kręt), praca sił i energia kinetyczna.

ĆWICZENIE 9

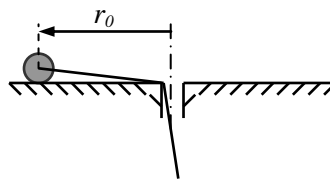
Pęd, moment pędu, praca sił i energia kinetyczna punktu materialnego

Zadanie 9.1

Pocisk artyleryjski o masie $m=30\text{kg}$ wylatuje z lufy armaty z prędkością $v=50\text{m/s}$. Jaka jest średnia siła odrzutu działająca na armatę, jeśli lot pocisku w lufie trwał $0,1\text{s}$?

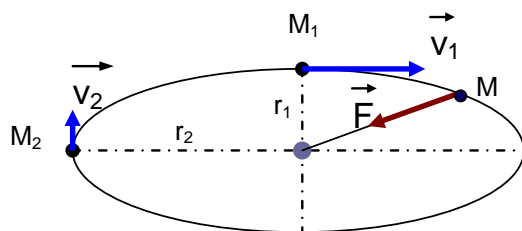
Zadanie 9.2

Punkt o masie m jest zamocowany do nieważkiej i nierozciągliwej nici i porusza się po okręgu o promieniu r_0 ze stałą prędkością kątową ω_0 . Następnie nić została wciągnięta do otworu i punkt porusza się po okręgu o promieniu $0,5r_0$. Pomijając opory ruchu, obliczyć w jakim stopniu zmieni się naciąg nici.



Zadanie 9.3

Punkt M porusza się po torze eliptycznym dokoła nieruchomego środka pod działaniem siły przyciągającej F do tego środka. Znaleźć prędkość v_2 w punkcie toru najbardziej oddalonym od środka, jeżeli prędkość punktu w miejscu najbliższym środka $v_1=3\text{[m/s]}$, a promień $r_2=5r_1$.

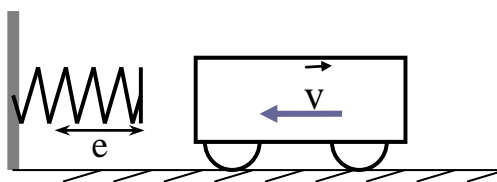


Zadanie 9.4

Samochód jedzie z prędkością $v_0=108\text{km/h}$ w dół po stoku nachylonym do poziomu pod kątem $\alpha=0,008\text{rad}$. W pewnej chwili kierowca zobaczywszy niebezpieczeństwo zaczyna hamować. Opór całkowity hamowania jest stały i wynosi $0,1$ ciężaru samochodu. Obliczyć, w jakiej odległości d i po jakim czasie τ samochód zatrzyma się. Przyjąć $\sin\alpha \approx \alpha$ (dla α w radianach)

Zadanie 9.5

Wagonik o masie $m=10^3\text{kg}$ jedzie z prędkością $v=18\text{km/h}$ po torze prostym poziomym i uderza o zderzak. Jaka musi być sztywność sprężyny zderzaka aby jego ugięcie $e \leq 0,5\text{m}$? Zakładamy liniową charakterystykę sprężyny i brak strat energii mechanicznej.

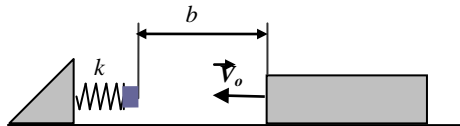


Zadanie 9.6

Wyznaczyć zmianę energii kinetycznej punktu materialnego z zadania 9.2 i wyjaśnić jaka jest przyczyna tej zmiany.

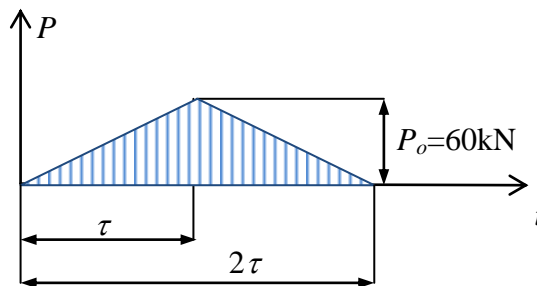
Zadanie 9.7

Ciało o masie m w chwili, gdy znajdowało się w odległości b od zderzaka miało prędkość v_0 . Nie zdążywszy wytracić prędkości, zostało ono zatrzymane na zderzaku, którego sprężyna ma sztywność k . Obliczyć maksymalne ugięcie sprężyny, jeśli współczynnik tarcia ślizgowego ciała o podłoże jest równy μ . Masę zderzaka i straty energii podczas zderzenia pominać.



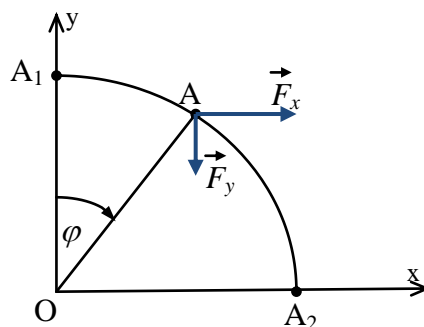
Zadanie 9.8

Wagon o masie $m=30$ ton spoczywający na poziomym prostym torze został wprowadzony w ruch zmienną siłą poziomą P jak na rysunku, działającą w czasie $2\tau=20$ s. Jaka prędkość uzyskał wagon w tym czasie, jeśli opory ruchu po torze są równe 5% ciężaru wagonu?



Zadanie 9.9

Punkt A porusza się po łuku kołowym o promieniu r z położenia A_1 do A_2 pod wpływem siły o współrzędnych $F_x=by$ i $F_y=-c$ (b i c – stałe). Wyznaczyć pracę siły F . Jaka pracę wykona ta siła, jeśli punkt A będzie się przemieszczał z położenia A_1 do A_2 wzdłuż osi układu współrzędnych, tzn. po odcinkach A_1O i OA_2 ?

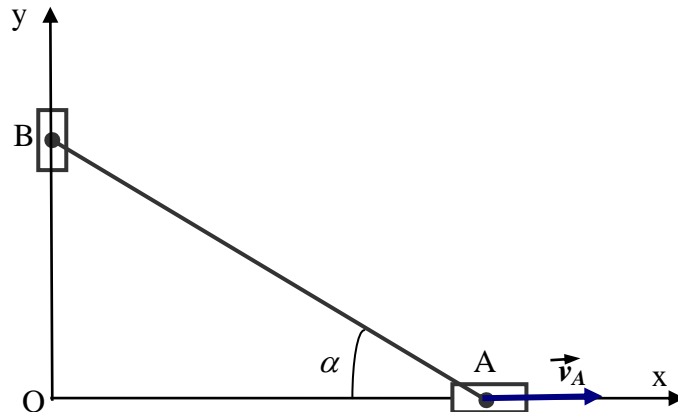


ĆWICZENIE 10

Pęd, moment pędu, praca sił i energia kinetyczna układu punktów materialnych

Zadanie 10.1

Dwa suwaki A i B, każdy o masie $m=0.3\text{kg}$, są połączone sztywnym i nieważkim prętem i mogą przesuwać się po prowadnicach pokrywających się z osiami układu Oxy. Prędkość suwaka A jest zgodna ze zwrotem osi Ox i wynosi $v_A=0.5\text{m/s}$. Oblicz pęd suwaków w chwili kiedy kąt $\alpha=30^\circ$.



Zadanie 10.2

Pocisk o masie $m=0.1\text{kg}$ wbija się z prędkością $v=100\text{m/s}$ w kostkę o masie $9m$, spoczywającą na chropowatej poziomej płycie. Współczynnik tarcia kostka – płyta $\mu=0.1$. Oblicz przesunięcie kostki.

Zadanie 10.3

Dwa punkty materialne poruszają się na gładkiej poziomej płaszczyźnie wzdłuż jednej prostej jak na rysunku. Obliczyć prędkości punktów po zderzeniu. Tarcie ślizgowe pominąć. Zadanie rozwiązać dla dwóch wariantów:

- zderzenie idealnie plastyczne (punkty po zderzeniu są „sklejone”),
- zderzenie idealnie sprężyste.



Zadanie 10.4

Obliczyć wspólną prędkość układu dwóch idealnie sprężystych kulek o masach m_1 i m_2 , połączonych lekką nierozciągliwą nicią po napięciu się nici, jeżeli wcześniej kulka o masie m_1 miała prędkość v_1 a kulka druga była nieruchoma. Kulki znajdują się na poziomym gładkim stole.



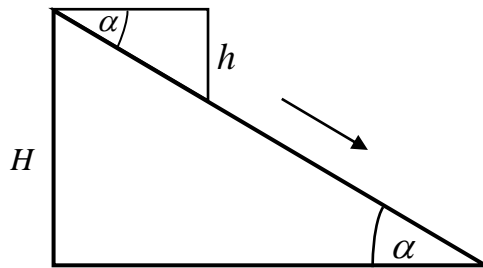
Zadanie 10.5

Lufa działa jest nachylona poziomo a działo ma ciężar $G=11\text{kN}$. Ciężar pocisku wynosi $P=5,5\text{N}$. Prędkość pocisku u wylotu lufy wynosi $v=900\text{m/s}$. O ile i w którą stronę przesunie się działo, jeżeli opory jego ruchu są równe $0,1G$?

Zadanie 10.6

Klin górny o masie m zsuwa się bez tarcia po klinie dolnym o masie M umieszczonym na poziomym gładkim podłożu. O ile i w którą stronę przesunie się klin dolny względem podłoża, gdy klin górny zsunie się z niego? Wymiary H , h i α są dane.

Wskazówka: Zastosować zasadę ruchu środka masy układu punktów materialnych.



Zadanie 10.7

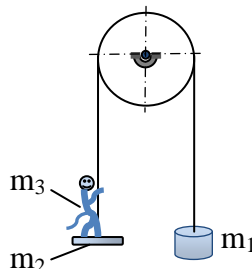
Łódź o masie $m_1=120\text{kg}$ po wyłączeniu napędu, płynie na stojącej wodzie z prędkością $u=4\text{m/s}$. Z tyłu łodzi stoi człowiek o masie $m_2=80\text{kg}$, który w pewnej chwili zaczął iść do przodu z prędkością $w=1\text{m/s}$ względem łodzi. Jak zmieni się prędkość łodzi? Opory ruchu pomijamy.

Zadanie 10.8

Nieważki prosty pręt AB o długości $2l$ obraca się z prędkością kątową ω_0 wokół stałej pionowej osi z prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek. Na końcu A pręta znajduje się punkt o masie m_1 zaś na końcu B o masie m_2 . Co stanie się, jeśli punkty te zostaną przesunięte w kierunku osi obrotu, odpowiednio o a i b ($a < l$ i $b < l$)?

Zadanie 10.9

Przez lekki krążek przerzucono wiotką i nierozciągliwą linkę. Na jednym końcu tej linki przymocowano ciężarek o masie m_1 , zaś na drugim szalkę o masie m_2 , na której stoi nieruchomo małpa o masie m_3 , przy czym $m_1=m_2+m_3$. Z jaką prędkością będzie poruszał się ciężarek, jeśli małpa zacznie wspinać się po linie ze stałą prędkością względną (względem linki) w ? Masy krążka i linki oraz opory ruchu pominać.



WYKŁAD 6

Zasady w dynamice układu punktów materialnych i ciała sztywnego

Środek masy. Momenty bezwładności. Pęd, moment pędu, praca sił i energia kinetyczna.

ĆWICZENIE 11

Środek masy. Momenty bezwładności

Zadanie 11.1

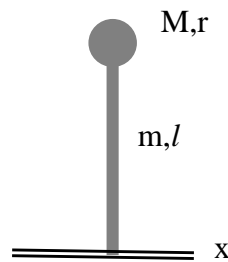
Wyprowadź wzory na główne centralne momenty bezwładności walca kołowego jednorodnego o masie m , promieniu r i wysokości h . Dalej, korzystając z tych wzorów wyznacz główne centralne momenty bezwładności dla jednorodnej cienkiej tarczy kołowej i jednorodnego pręta prostego.

Zadanie 11.2

Wyprowadź wzory na główne centralne momenty bezwładności prostopadłościanu jednorodnego o masie m i wymiarach $a \times b \times c$. Dalej, korzystając z tych wzorów wyznacz główne centralne momenty bezwładności dla jednorodnej cienkiej płytki prostokątnej.

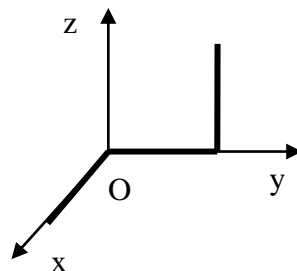
Zadanie 11.3

Obliczyć moment bezwładności drążka zmiany biegów samochodu względem jego osi x oraz położenie jego środka masy. Zakładamy, że drążek składa się z jednorodnego pręta o masie m i długości l z osadzoną na nim kulką o masie M i promieniu r .



Zadanie 11.4

Znaleźć współrzędne środka masy oraz macierz bezwładności względem układu $Oxyz$, trzech jednorodnych prętów każdy o masie $m=2\text{kg}$ i długości $l=1\text{m}$, połączonych sztywno ze sobą jak na rysunku.



Pęd, moment pędu, praca sił i energia kinetyczna ciała sztywnego

Zadanie 11.5

Obliczyć pęd koła jednorodnego o masie $m=24\text{kg}$ i promieniu $r=0.3\text{m}$, toczącego się bez poślizgu po prostej drodze, jeśli jego prędkość kątowa wynosi $\omega=10\text{rad/s}$.

Zadanie 11.6

Obliczyć zakres zmiany pędu dla koła z zadania 11.5, jeśli jego środek masy znajduje się w odległości $e=10\text{mm}$ od jego środka geometrycznego.

Zadanie 11.7

Koło jednorodne o masie m i promieniu r toczy się bez poślizgu po osi Ox układu współrzędnych Oxy . Prędkość środka koła jest równa v_s . Wyznaczyć moment pędu (kręt) tego koła względem:

- początku układu O ,
- chwilowego środka obrotu koła,
- środku koła.

Zadanie 11.8

Koło jednorodne o masie m i promieniu r toczy się bez poślizgu po prostej drodze. Wyznaczyć energię kinetyczną tego koła w następujących przypadkach:

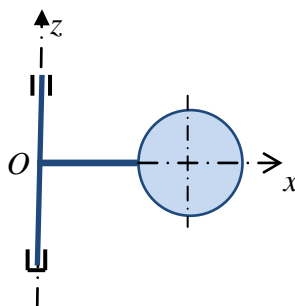
- koło toczy się bez poślizgu z prędkością środka v_s ,
- koło toczy się z poślizgiem z prędkością środka v_s i prędkością kątową ω ,
- koło toczy się bez poślizgu z prędkością środka v_s i posiada centryczny otwór o średnicy r .
Masa m odnosi się do koła pełnego (bez otworu).

ĆWICZENIE 12

Pęd, moment pędu, praca sił i energia kinetyczna ciała sztywnego c.d.

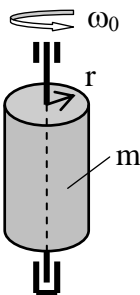
Zadanie 12.1

Wirujący układ jest złożony z jednorodnego pręta o długości $2r$ i sztywno przymocowanej do jego końca jednorodnej cienkiej tarczy kołowej o promieniu r , leżącej w płaszczyźnie Oxz . Oś pręta jest prostopadła do osi obrotu. Układ obraca się wokół osi Oz z prędkością kątową ω_0 . Masa pręta jest równa m a tarczy $2m$. Obliczyć kręt układu względem osi obrotu z oraz jego energię kinetyczną.



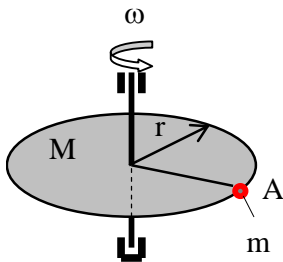
Zadanie 12.2

Jednorodny walec o masie $m=30\text{kg}$ i promieniu $r=0.1\text{m}$ został ze stanu spoczynku wprowadzony w ruch obrotowy wokół swej nieruchomej osi symetrii uzyskując prędkość kątową $\omega_f=120\text{rad/s}$ w ciągu $t_f=8\text{s}$. Wiedząc, że moment oporowy ruchu $M_t=0.2\text{Nm}$, oblicz moment napędowy M zakładając jego stałą wartość. Jaka praca zostanie wykonana przez momenty działające na układ w czasie t_f ?



Zadanie 12.3

Jednorodna tarcza kołowa o masie M i promieniu r obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół własnej pionowej i nieruchomej osi symetrii, przy czym na obwodzie tarczy spoczywa punkt A o masie m . Co stanie się, jeśli punkt A zacznie poruszać się po obwodzie tarczy z prędkością względną $w_A=\omega r$? Rozważyć oba kierunki ruchu punktu. Opory ruchu pomijamy.

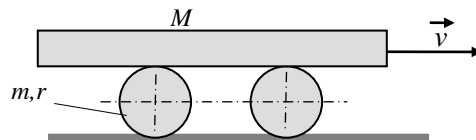


Zadanie 12.4

Jednorodne koło o promieniu R i jednorodny walec o promieniu r ($r < R$) mają jednakowe masy równe m i obracają się wokół własnych nieruchomych osi symetrii z równymi prędkościami kątowymi ω . Które ciało będzie się dłużej obracać przy jednakowych oporach ruchu? Odpowiedź uzasadnić.

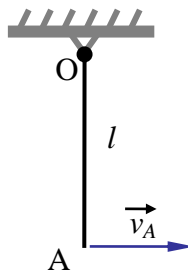
Zadanie 12.5

Oblicz energię kinetyczną układu składającego się z jednorodnej belki o masie M i dwóch jednakowych rolek o masie m i promieniu r każda. Belka jest przetaczana po rolkach ze stałą prędkością v . Toczenie belki po rolkach i rolek po podłożu odbywa się bez poślizgu.



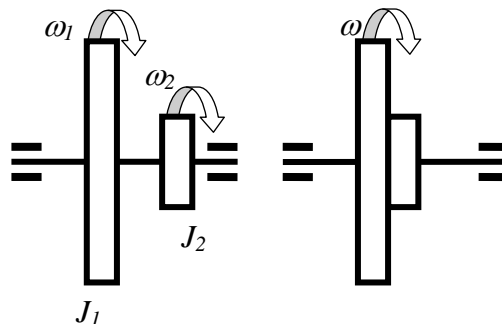
Zadanie 12.6

Prosty jednorodny pręt o długości $l=3.27\text{m}$ zamocowany jest obrotowo swoim końcem O tak, że może wykonywać ruch w płaszczyźnie pionowej. Jaką prędkość trzeba nadać końcowi A , aby pręt z położenia równowagi wykonał co najmniej pół obrotu?



Zadanie 12.7

Dwie niezależnie wirujące na jednej nieruchomej osi tarcze z prędkościami kątowymi ω_1 i ω_2 zostały nagle połączone (sklejone). Jak zmieni się energia kinetyczna układu, jeśli momenty bezwładności tych tarcz względem osi obrotu wynoszą odpowiednio J_1 i J_2 ? Rozważyc zgodne i przeciwnie zwroty prędkości kątowych tarcz.



WYKŁAD 7

Dynamiczne równania ruchu ciała sztywnego

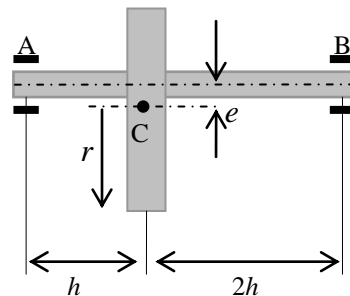
Ruch obrotowy i reakcje dynamiczne. Ruch płaski.

ĆWICZENIE 13

Ruch obrotowy i reakcje dynamiczne.

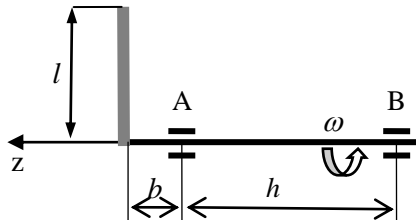
Zadanie 13.1

Jednorodne koło zamachowe o ciężarze $Q=1T$ i promieniu $r=0,6m$ jest osadzone na ułożyskowanej osi AB i obraca się z prędkością $n=1200obr/min$. Geometryczna oś obrotu jest przesunięta równolegle względem osi symetrii koła o wielkość $e=1mm$. Obliczyć reakcje dynamiczne łożysk A i B, jeśli $h=0,4m$.



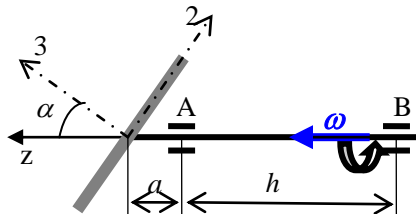
Zadanie 13.2

Do sztywnego i lekkiego wału, obracającego się ze stałą prędkością kątową ω przytwierdzono sztywno pod kątem prostym pręt jednorodny o masie m i długości l . Oblicz całkowite reakcje łożysk A i B. Wymiary b i h są dane.



Zadanie 13.3

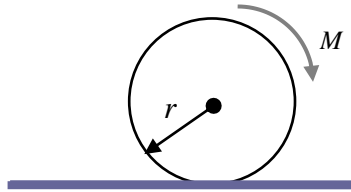
Oblicz reakcje dynamiczne w łożyskach A i B dwuramiennego śmigła samolotu w czasie jego obrotu, jeśli wskutek złego wykonania oś symetrii śmigła jest odchylona od osi obrotu o kąt $\alpha=0,015$ rad, a jego środek leży na osi obrotu. Śmigło należy traktować jako pręt prosty jednorodny. Ciężar śmigła $P=147,15N$, jego moment bezwładności względem osi symetrii $J=4,905kg \cdot m^2$, wymiary: $h=0,25m$, $a=0,15m$, a prędkość obrotowa jest stała i wynosi $n=3000obr/min$.



Ruch płaski.

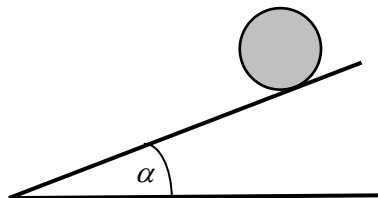
Zadanie 13.4

Napędowe koło samochodu o promieniu tocznym r i ciężarze P porusza się po prostej poziomej. Do koła jest przyłożony moment obrotowy M . Ramię bezwładności koła względem jego osi centralnej, prostopadłej do jego płaszczyzny, wynosi ρ . Współczynnik tarcia suwnego wynosi μ . Jaki warunek musi spełniać moment obrotowy, aby koło toczyło się bez poślizgu? Opory toczenia pomijamy.



Zadanie 13.5

Oblicz, jaki kąt α powinna tworzyć z poziomem równia, po której ma się toczyć bez poślizgu a) walec, b) kula, jeżeli wiadomo, że współczynnik tarcia między walcem / kulą i równią wynosi μ .



Zadanie 13.6

Prosty jednorodny pręt AB o masie m jest zawieszony poziomo na dwóch pionowych linkach przyczepionych do sufitu. Oblicz siłę naciągu lewej linki w chwili zerwania się prawej oraz przyspieszenie kątowe pręta.

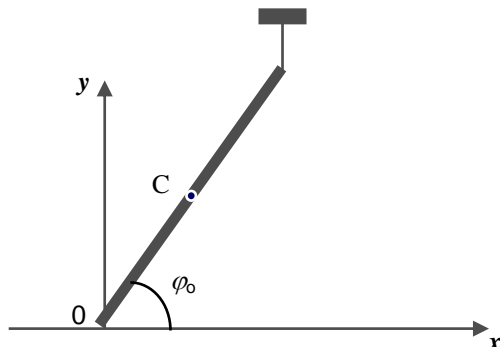


ĆWICZENIE 14

Zadania różne

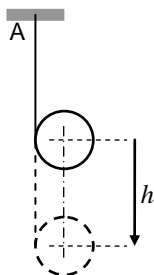
Zadanie 14.1

Jednorodna belka o ciężarze G i długości $2l$ jest podtrzymywana pod kątem $\varphi_0 = (\pi/3)$ rad do poziomu. Oblicz nacisk belki na podłoże w momencie zerwania podtrzymującej ją linki.



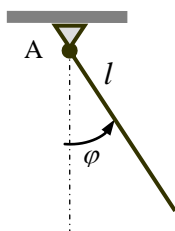
Zadanie 14.2

Walec o masie m owinięto linką, której drugi koniec przymocowano do stałego punktu A. W pewnej chwili walec zaczął swobodnie opadać, odwijając swobodnie się z linki. Obliczyć prędkość v osi walca w chwili, gdy jego środek obniżył się o wysokość h oraz obliczyć siłę naciągu linki.



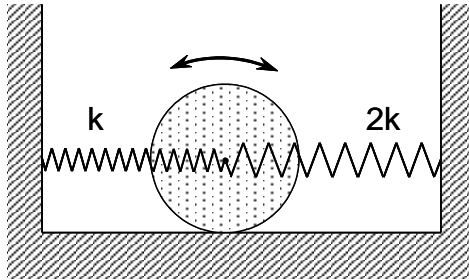
Zadanie 14.3

Wyznacz równanie małych drgań swobodnych pręta jednorodnego o długości $l=1$ m, zamocowanego obrotowo w punkcie A i wykonującego ruch w płaszczyźnie pionowej. Obliczyć okres tych drgań z dokładnością do 0,01 s.



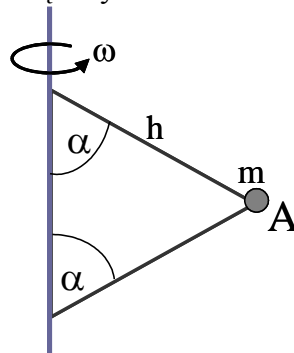
Zadanie 14.4

Koło o promieniu $r=0.3\text{m}$ i masie $m=20\text{kg}$ może toczyć się bez poślizgu w płaszczyźnie pionowej po prostej poziomej x . Środek koła został połączony z dwiema poziomymi sprężynami o sztywnościach k i $2k$, przy czym $k=1\text{kN/m}$. Po przetoczeniu koła z położenia równowagi (w lewo lub w prawo) i pozostawieniu go, zacznie ono wykonywać ruch drgający. Wyprowadzić równanie ruchu tego koła i obliczyć częstotliwość jego drgań własnych w Hz.



Zadanie 14.5

Dwa jednakowe nieważkie pręty każdy o długości h , przymocowano do pionowej osi obrotu pod kątami α . W wierzchołku A zamocowano małą kulę o masie m . Jaka musi być prędkość kątowa ω , aby pręt dolny nie był obciążony?



Zadanie 14.6

Na szpulę o promieniach a i b nawinięto nierozciągliwą nić i umieszczono ją na doskonale gładkim poziomym podłożu (współczynnik tarcia $\mu=0$). Obliczyć przyspieszenie środka masy szpuli oraz jej przyspieszenie kątowe, gdy do końca nici przyłożono stałą siłę F . Masa szpuli wynosi m , zaś jej moment bezwładności względem osi symetrii równa się J_z . Jak zmieniają się te przyspieszenia, gdy pomiędzy szpulą a podłożem występuje siła tarcia, zaś szpula porusza się bez poślizgu? Jaka jest siła tarcia?

